Digitales Rechnen,
und die „Turing Maschine"

Wolfgang Hagen







Agenda

Rechnen (und Schalten) mit Binärzahlen

Alan Turing und die „Turing Maschine"

W. Hagen – Digitales Rechnen,- „Turing Maschine" - „von Neumann Prinzip"



LEUPHANA UNIVERSITÄT LÜNEBURG

Agenda

Rechnen (und Schalten) mit Binärzahlen

W. Hagen – Digitales Rechnen,- „Turing Maschine" - „von Neumann Prinzip"



LEUPHANA UNIVERSITÄT LÜNEBURG



Die Grundlage allen Rechnens in der Neuzeit ist die Stellenwertschreibweise von Zahlen.

Die alten Griechen
kannten keine 0

Die Römer
kannten keine 0

W. Hagen – Digitales Rechnen,- „Turing Maschine" - „von Neumann Prinzip"



LEUPHANA UNIVERSITÄT LÜNEBURG

Wie rechneten die Römer?

## Nicht stellenwertiges Zahlensystem – z.B. das Römische

| **Zeichen** | I | V | X | L | C | D | M | ↁ | ↂ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Wert** | 1 | 5 | 10 | 50 | 100 | 500 | 1.000 | 5.000 | 10.000 |

| **MDCCCCLXXXIIII (1984)** | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | + | D | + | CCCC | + | L | + | XXX | + | IIII |
| 1*1000 | + | 1*500 | | 4*100 | | 1*50 | | 3*10 | | 4*1 |

| **MCMLXXXIV (1984)** | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | + | CM | + | L | + | XXX | + | IV |
| 1*1000 | + | (1*100) - (1*1000) | | 1*50 | | 3*10 | | (1*1) - (1*5) |





Stellenwert/Nichtstellenwert - Definition?



**Nicht-Stellenwert-System:**

MDCCCCLXXXIIII

MCMLXXXIV

Es gibt keine feste Stelle der Zahl-Zeichen in Bezug auf Ihren Wert

**Stellenwert-System:**

1984

Tausender Hunderter Zehner Einer

Zahl-Zeichen haben einen feste Werte-Stelle

Das Stellenwert-System basiert auf der 0!





Aber woher kommt die Null “0”



Das Zeichen “0”
kommt aus der arabisch-indischen Welt des Mittelalters

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Europäisch | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Arabisch-Indisch | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ |

Die indischen Ziffern werden erstmals mit dem Werk „Über das Rechnen mit indischen Ziffern“ (um 825) von Al-Chwarizmi (Nach seinem Namen kommt das Wort „Algorithmus“) verbreitet.

„Algoritmi de numero Indorum“ (13. Jh)



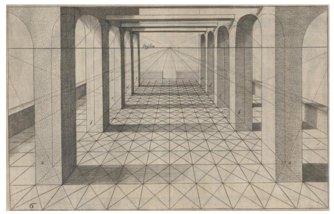


Was “ist” die “0”…



- Die “0” ist nicht einfach nur nichts, trotz: (0=0).
- Sie besetzt eine Stelle in einer Zeichenreihe von Zahlen (0… 01001100)
- Während das römische Zahlensystem für jeden Zahlenwert ein eigenes Zeichen hat, erlaubt die “0” die Veränderung von Werten von Zahlenzeichen, ohne das Zeichen zu ändern. (**1** = **1**0)

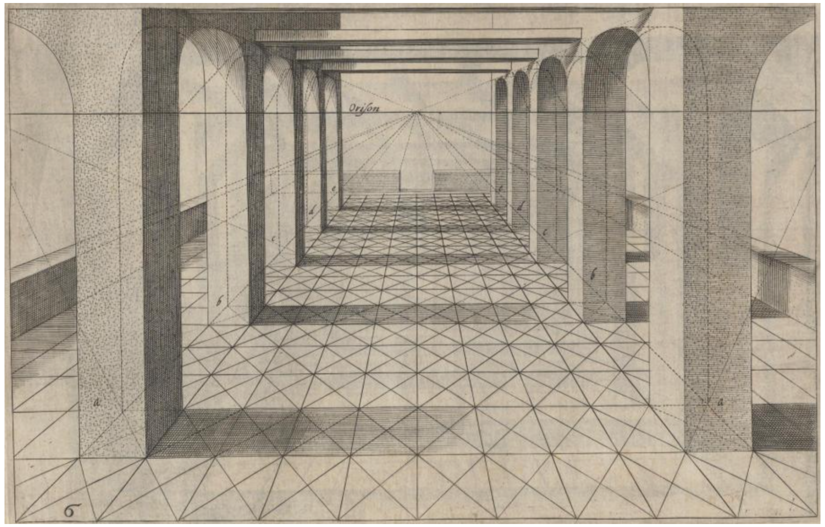
Mathematik-Historiker Brian Rotman vermutet, dass die “0” als “Stelle” erst nach der Einführung der “Zentral-Perspektive" in die darstellenden Künste in die Mathematik integriert werden konnte…







der so genannte Fluchtpunkt…




Vries, Hans Vredeman de (1605): Perspective



Was sind Eigenschaften der “0”??



- Die Null hat einige mathematische Besonderheiten:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0+0 | = | 0 | |
| 0+5 | = | 5 | |
| 0-5 | = | -5 | |
| **5*0** | **=** | **0** | |
| 5/0 | = | ?? | Durch “0” dividieren ist “nicht definiert” |
| **0*5** | **=** | **0** | |
| 0/5 | = | 0 | |
| **$5^0$** | **=** | **1** | |
| **$1^0$** | **=** | **1** | |
| $0^1$ | = | 0 | |
| **$0^0$** | **=** | **1(!)** | “Exponentenregel”: $x^n/x^n=x^{(n-n)}=x^0=1$ |
| √0 | = | 0 | |
| $0^{1/2}$ | = | 0 | |
| $0^{1/3}$ | = | 0 | |
| $0^{1/0}$ | = | ?? | 0te Wurzel aus 0 - nicht definiert… |



Nur “0” ermöglicht das Stellenwert-System



## Stellenwertsystem

Zahlensystem, bei dem die (additive) Wertigkeit eines Symbols von seiner Position abhängt.

$$z_i \bullet b^i + \dots + z_n \bullet b^0$$

b = Basis (Grundzahl, Radix) | b >= 2…

$b^{i..0}$ = Exponent an der Stelle | i=0..

$z_i \in Z = \{0,1, \dots, b-1\}$



Am Beispiel des Dezimal-Systems..



## Stellenwertsystem

$$z_0 \bullet b^n + \dots + z_n \bullet b^0$$

**Dezimal:** b = 10 | z = 0 ..(b-1)

z=0..9 b=10

| Stelle 3 | Stelle 2 | Stelle 1 | Stelle 0 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1*10^3 | 9*10^2 | 8*10^1 | 4*10^0 | = | 1984 |
| **1000** | **900** | **80** | **4** | **=** | **1984** |



Am Beispiel des “Hexadezimal”-Systems

## Stellenwertsystem

$z_0 \bullet b^n + \ldots \quad + z_n \bullet b^0$

**Hexa-Dezimal:** b= 16 | z = 0 ..(b-1)

| z=0..9,A..F | b=16 | | | |
|---|---|---|---|---|
| Stelle 2 | Stelle 1 | Stelle 0 | | |
| 7*16^2 | C*10^1 | 0*10^0 | = | 7CO |
| **1792** | **192** | **0** | = | **1984** |



und nun das “Binär”-System



## Stellenwertsystem

$z_0 \bullet b^n + \ldots \quad + z_n \bullet b^0$

**Binär:** b= 2 | z= 0 ..(b-1)

| z=0..1 | b=2 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Stelle 3 | Stelle 2 | Stelle 1 | Stelle 0 | | |
| 1*2^3 | 1*2^2 | 1*2^1 | 1*2^0 | = | 1111 |
| **8** | **4** | **2** | **1** | = | **15** |



wir brauchen mehr “Stellen”...



## Stellenwertsystem

$z_0 \bullet b^n + \ldots \quad + z_n \bullet b^0$

**Binär:** b= 2 | z= 0 ..(b-1)

| | | | | | | | z=0..1 | b=2 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| St 10 | St 9 | St 8 | St 7 | St 6 | St 5 | St 4 | St 3 | St 2 | St 1 | St 0 | | |
| 1*2^10 | 1*2^9 | 1*2^8 | 1*2^7 | 1*2^6 | 0*2^5 | 0*2^4 | 0*2^3 | 0*2^2 | 0*2^1 | 0*2^0 | = | 11111000000 |
| **1024** | **512** | **256** | **128** | **64** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | = | **1984** |

Wie spricht man: “11111000000”??



Was soll das “Hexadezimale”??



[1792] [192] [1984]

Hexadezimal : $7 \times 16^2 + C \times 16^1 + 0 \times 16^0 = 7C0$

1111 1000 0000

“Nibble”

In der Computerinformatik stellen wir deshalb Zahlenwerte in Hexadezimalzahlen dar, weil sie sehr gut auf “Nibble”, d.h. auf Vierergruppen von Bitfolgen darstellbar sind.

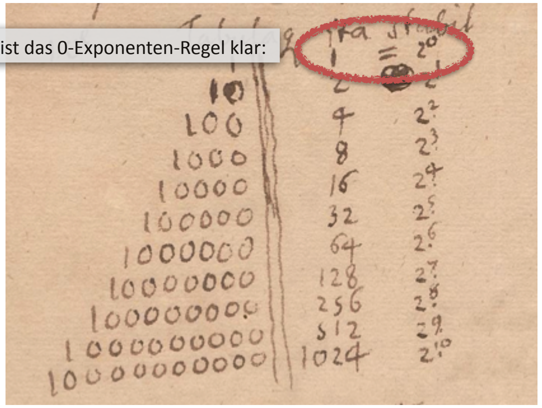


und seit wann gibt es das Dualsystem?

## Das binäre Zahlensystem

in einem ersten Entwurf von Gottfried Wilhelm Leibniz, 1697

Schon für Leibniz ist das 0-Exponenten-Regel klar:






Weiter gehts: binär rechnen...



## Addition:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | + | 0 | = | 0 | - |
| 0 | + | 1 | = | 1 | - |
| 1 | + | 0 | = | 1 | - |
| 1 | + | 1 | = | 0 | 1 |



Ein Beispiel..



## Addition:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | + | 0 | = | 0 | - |
| 0 | + | 1 | = | 1 | - |
| 1 | + | 0 | = | 1 | - |
| 1 | + | 1 | = | 0 | 1 |

Beispiel:

| | 1 | 1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| + | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Üb | | | | |



1 + 1 ist..



## Addition:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | + | 0 | = | 0 | - |
| 0 | + | 1 | = | 1 | - |
| 1 | + | 0 | = | 1 | - |
| 1 | + | 1 | = | 0 | 1 |

Beispiel:

| | 1 | 1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| + | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Üb | | | | |
| | | | | 0 |



Aber Achtung: Übertrag!!!

## Addition:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | + | 0 | = | 0 | - |
| 0 | + | 1 | = | 1 | - |
| 1 | + | 0 | = | 1 | - |
| 1 | + | 1 | = | 0 | 1 |

Beispiel:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 0 | 1 |
| + | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Üb | | | 1 | |
| | | | | 0 |





Also jetzt 0+1 =...

Rechnen (und Schalten) mit Binärzahlen

## Addition:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | + | 0 | = | 0 | - |
| 0 | + | 1 | = | 1 | - |
| 1 | + | 0 | = | 1 | - |
| 1 | + | 1 | = | 0 | 1 |

Beispiel:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 0 | 1 |
| + | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Üb | | | 1 | |
| | | | 1 | 0 |





Weiter gehts 1+1 ...

Rechnen (und Schalten) mit Binärzahlen

## Addition:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | + | 0 | = | 0 | - |
| 0 | + | 1 | = | 1 | - |
| 1 | + | 0 | = | 1 | - |
| 1 | + | 1 | = | 0 | 1 |

Beispiel:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 0 | 1 |
| + | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Üb | | | 1 | |
| | | 0 | 1 | 0 |





Und dann der Übertrag...

Rechnen (und Schalten) mit Binärzahlen

## Addition:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | + | 0 | = | 0 | - |
| 0 | + | 1 | = | 1 | - |
| 1 | + | 0 | = | 1 | - |
| 1 | + | 1 | = | 0 | 1 |

Beispiel:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 0 | 1 |
| + | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Üb | 1 | | 1 | |
| | | 0 | 1 | 0 |





Und wieder 1+1 ...

## Addition:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | + | 0 | = | 0 | - |
| 0 | + | 1 | = | 1 | - |
| 1 | + | 0 | = | 1 | - |
| 1 | + | 1 | = | 0 | 1 |

Beispiel:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 1 | 0 | 1 |
| + | | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Üb | | 1 | | 1 | |
| | | 0 | 0 | 1 | 0 |



Und wieder der Übertrag...





## Addition:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | + | 0 | = | 0 | - |
| 0 | + | 1 | = | 1 | - |
| 1 | + | 0 | = | 1 | - |
| 1 | + | 1 | = | 0 | 1 |

Beispiel:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 1 | 0 | 1 |
| + | | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Üb | 1 | 1 | | 1 | |
| | | 0 | 0 | 1 | 0 |



0+1 ist dann..





## Addition:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | + | 0 | = | 0 | - |
| 0 | + | 1 | = | 1 | - |
| 1 | + | 0 | = | 1 | - |
| 1 | + | 1 | = | 0 | 1 |

Beispiel:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 1 | 0 | 1 |
| + | | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Üb | 1 | 1 | | 1 | |
| | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |



Und so sieht's dezimal aus:





## Addition:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | + | 0 | = | 0 | - |
| 0 | + | 1 | = | 1 | - |
| 1 | + | 0 | = | 1 | - |
| 1 | + | 1 | = | 0 | 1 |

Beispiel:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 1 | 0 | 1 | ≙ 13 |
| + | | 0 | 1 | 0 | 1 | ≙ 5 |
| Üb | 1 | 1 | | 1 | | |
| | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | ≙ 18 |



Nun zur Subtraktion...

## Subtraktion:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | - | 0 | = | 0 | - |
| 0 | - | 1 | = | 1 | 1 |
| 1 | - | 0 | = | 1 | - |
| 1 | - | 1 | = | 0 | - |

Auch hier Beispiel...







## Subtraktion:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | - | 0 | = | 0 | - |
| 0 | - | 1 | = | 1 | 1 |
| 1 | - | 0 | = | 1 | - |
| 1 | - | 1 | = | 0 | - |

Beispiel:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 0 | 1 |
| - | 0 | -1 | 0 | -1 |
| Üb | | | | |

1-1 ist...







## Subtraktion:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | - | 0 | = | 0 | - |
| 0 | - | 1 | = | 1 | 1 |
| 1 | - | 0 | = | 1 | - |
| 1 | - | 1 | = | 0 | - |

Beispiel:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 0 | 1 |
| - | 0 | -1 | 0 | -1 |
| Üb | | | | |
| | | | | 0 |

0 minus 0 ...







## Subtraktion:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | - | 0 | = | 0 | - |
| 0 | - | 1 | = | 1 | 1 |
| 1 | - | 0 | = | 1 | - |
| 1 | - | 1 | = | 0 | - |

Beispiel:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 0 | 1 |
| - | 0 | -1 | 0 | -1 |
| Üb | | | | |
| | | | 0 | 0 |

1 minus 1 ...

## Subtraktion:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | - | 0 | = | 0 | - |
| 0 | - | 1 | = | 1 | 1 |
| 1 | - | 0 | = | 1 | - |
| 1 | - | 1 | = | 0 | - |

Beispiel:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 0 | 1 |
| - | 0 | -1 | 0 | -1 |
| Üb | | | | |
| | | 0 | 0 | 0 |



LEUPHANA UNIVERSITÄT LÜNEBURG

1 minus 0 …





## Subtraktion:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | - | 0 | = | 0 | - |
| 0 | - | 1 | = | 1 | 1 |
| 1 | - | 0 | = | 1 | - |
| 1 | - | 1 | = | 0 | - |

Beispiel:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 0 | 1 | ≙ 13 |
| - | 0 | -1 | 0 | -1 | ≙ -5 |
| Üb | | | | | |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | ≙ 8 |



LEUPHANA UNIVERSITÄT LÜNEBURG

Kein Übertrag, also anderes Beispiel…





## Subtraktion:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | - | 0 | = | 0 | - |
| 0 | - | 1 | = | 1 | 1 |
| 1 | - | 0 | = | 1 | - |
| 1 | - | 1 | = | 0 | - |

Anderes Beispiel:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| - | | -1 | 0 | -1 | 0 |
| Üb | | | | | |



LEUPHANA UNIVERSITÄT LÜNEBURG

1 - 0 …





## Subtraktion:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | - | 0 | = | 0 | - |
| 0 | - | 1 | = | 1 | 1 |
| 1 | - | 0 | = | 1 | - |
| 1 | - | 1 | = | 0 | - |

Anderes Beispiel:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| - | | -1 | 0 | -1 | 0 |
| Üb | | | | | |
| | | | | | 1 |



LEUPHANA UNIVERSITÄT LÜNEBURG

0 - 1 …

## Subtraktion:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | - | 0 | = | 0 | - |
| 0 | - | 1 | = | 1 | 1 |
| 1 | - | 0 | = | 1 | - |
| 1 | - | 1 | = | 0 | - |

Anderes Beispiel:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| - | | -1 | 0 | -1 | 0 |
| Üb | | | | | |
| | | | | 1 | 1 |







Aber Achtung:

Rechnen (und Schalten) mit Binärzahlen

## Subtraktion:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | - | 0 | = | 0 | - |
| 0 | - | 1 | = | 1 | 1 |
| 1 | - | 0 | = | 1 | - |
| 1 | - | 1 | = | 0 | - |

Anderes Beispiel:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| - | | -1 | 0 | -1 | 0 |
| Üb | | | | -1 | |
| | | | | 1 | 1 |







0 - 1 ...

Rechnen (und Schalten) mit Binärzahlen

## Subtraktion:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | - | 0 | = | 0 | - |
| 0 | - | 1 | = | 1 | 1 |
| 1 | - | 0 | = | 1 | - |
| 1 | - | 1 | = | 0 | - |

Anderes Beispiel:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| - | | -1 | 0 | -1 | 0 |
| Üb | | | -1 | | |
| | | | 1 | 1 | 1 |







Achtung...

Rechnen (und Schalten) mit Binärzahlen

## Subtraktion:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | - | 0 | = | 0 | - |
| 0 | - | 1 | = | 1 | 1 |
| 1 | - | 0 | = | 1 | - |
| 1 | - | 1 | = | 0 | - |

Anderes Beispiel:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| - | | -1 | 0 | -1 | 0 |
| Üb | | -1 | | -1 | |
| | | | 1 | 1 | 1 |







1 - 1 = 0, 0 - 1 ...

## Subtraktion:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | - | 0 | = | 0 | - |
| 0 | - | 1 | = | 1 | 1 |
| 1 | - | 0 | = | 1 | - |
| 1 | - | 1 | = | 0 | - |

Anderes Beispiel:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| - | | -1 | 0 | -1 | 0 |
| Üb | | -1 | -1 | | |
| | | 1 | 1 | 1 | 1 |





Achtung...



Rechnen (und Schalten) mit Binärzahlen

## Subtraktion:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | - | 0 | = | 0 | - |
| 0 | - | 1 | = | 1 | 1 |
| 1 | - | 0 | = | 1 | - |
| 1 | - | 1 | = | 0 | - |

Anderes Beispiel:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| - | | -1 | 0 | -1 | 0 |
| Üb | -1 | -1 | -1 | | |
| | | 1 | 1 | 1 | 1 |





1 minus 1 ...



Rechnen (und Schalten) mit Binärzahlen

## Subtraktion:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | - | 0 | = | 0 | - |
| 0 | - | 1 | = | 1 | 1 |
| 1 | - | 0 | = | 1 | - |
| 1 | - | 1 | = | 0 | - |

Anderes Beispiel:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| - | | -1 | 0 | -1 | 0 |
| Üb | -1 | -1 | -1 | | |
| | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |





in Dezimal ...



Rechnen (und Schalten) mit Binärzahlen

## Subtraktion:

| Rechen-Regeln | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Erg | Übtrg |
| 0 | - | 0 | = | 0 | - |
| 0 | - | 1 | = | 1 | 1 |
| 1 | - | 0 | = | 1 | - |
| 1 | - | 1 | = | 0 | - |

Anderes Beispiel:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | $\triangleq$ 25 |
| - | | -1 | 0 | -1 | 0 | $\triangleq$ -10 |
| Üb | -1 | -1 | -1 | | | |
| | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | $\triangleq$ 15 |





Die Multiplikation...

## Multiplikation:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | | x | | 5 | | | |
| 1 | 0 | 0 | x | 1 | 0 | 1 | | |
| 1 | 0 | 0 | | | | | | |
| | 0 | 0 | 0 | | | | | |
| | | 1 | 0 | 0 | | | | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | | | ≙ | 20 |





## Problem:
## In Computern kann kein „Minus-Zeichen“ implementiert werden!

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | ≙ | 25 |
| - | | -1 | 0 | -1 | 0 | ≙ | -10 |
| Üb | -1 | -1 | -1 | | | | |
| | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | ≙ | 15 |

Lösung:

Subtraktion per Addition – „Zweierkomplement“





## Der Weg zum „Zweierkomplement“ …

- Erst “Einer-Komplement” bilden,
- dann “Zweier-Komplement” bilden…





**Das Einer-Komplement**

Man bildet das sogenannte Einerkomplement, indem man jede Zahl durch ihr Gegenteil ersetzt …

… also die 0 durch die 1 und die 1 durch die 0.

01011010 wird zu 10100101
11101101 wird zu 00010010

**Das Zweier-Komplement**

Das Zweierkomplement entspricht dem Einer-Komplement, nur wird zusätzlich noch 00000001 addiert.

01011010 (90) wird im Einer-Komplement zu
10100101 (165) im Zweier-Komplement zu
10100110 (166)

11101101 (237) wird im Einer-Komplement zu
00010010 (18) im Zweier-Komplement zu
00010011 (19)



...



Zweier-Komplement Rechnung

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| - | | | -1 | 0 | -1 | 0 |
| Üb | | | | | | |



füllen mal den Subtrahend zum 8-Bit auf



Zweier-Komplement Rechnung

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| - | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 |
| Üb | | | | | | | | | |



Und jetzt umkehren:



Zweier-Komplement Rechnung

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| - | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Üb | | | | | | | | | |



1 aufaddieren...

Zweier-Komplement Rechnung

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| - | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Üb | | | | | | | | | 1 |







1 + 1 = 0, 0 + 1 = 1, Übertrag!



Zweier-Komplement Rechnung

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| - | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Üb | | | | | | | | 1 | 1 |
| - | | | | | | | | 1 | 1 |







und weiter gehts…



Zweier-Komplement Rechnung

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| - | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Üb | | | | | | | | 1 | 1 |
| - | | | | | | | 1 | 1 | 1 |









Zweier-Komplement Rechnung

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| - | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Üb | | | | | | | | 1 | 1 |
| - | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 |

## Zweier-Komplement Rechnung

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| - | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Üb | | | | 1 | | | | 1 | 1 |
| - | | | | | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |





## Zweier-Komplement Rechnung

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| - | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Üb | | | 1 | 1 | | | | 1 | 1 |
| - | | | | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |





## Zweier-Komplement Rechnung

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| - | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Üb | | 1 | 1 | 1 | | | | 1 | 1 |
| - | | | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |





## Zweier-Komplement Rechnung

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| - | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Üb | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | 1 | 1 |
| - | | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Zweier-Komplement Rechnung

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| - | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Üb | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | 1 | 1 |
| - | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Und nun die dezimale Sicht…





Zweier-Komplement Rechnung

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | ≙ 25 |
| - | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | ≙ -10 |
| Üb | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | 1 | 1 | |
| - | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | ≙ 15 |





**Zweier-Komplement**
nennt man das Verfahren, negative Zahlen im Dualsystem darzustellen.

Dabei werden **keine zusätzlichen Symbole** wie + und − benötigt.

Dies ist vor allem wichtig für Computer, die mit **Schaltungen** arbeiten, die **nur die Werte 0 oder 1** annehmen können.

…





Resume:

Wir können ein binäres Rechenwerk konstruieren, in dem alle Grundrechenarten binär mit Hilfe von Additionen durchgeführt werden können.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $1_1$ | $1_1$ | $1_1$ | $1_1$ | $1_1$ | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Multiplikation:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | | x | | 5 | | | |
| 1 | 0 | 0 | x | 1 | 0 | 1 | | |
| 1 | 0 | 0 | | | | | | |
| | 0 | 0 | 0 | | | | | |
| | | 1 | 0 | 0 | | | | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | | | ≙ | 20 |

Division

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 20 | | | : | | 4 | | | | | |
| | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | : | 1 | 0 | 0 | ≙ | 1 | 0 | 1 |
| - | 1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | |
| | | | 1 | 0 | 0 | | | | | | | | |
| | | - | 1 | 0 | 0 | | | | | | | | |
| | | | 0 | 0 | 0 | | | | | ≙ | | 5 | |

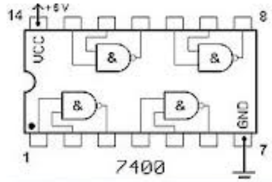
Wie wird das “geschaltet”?

## Binäres Rechnen im Computer

wird realisiert durch “Logische Schaltungen”

Die beiden Ziffern 0 und 1 können mit den beiden Werten für logische Aussagen „falsch“ und „wahr“ identifiziert werden.

Logische Schaltungen sind elektronisch einfach, lassen sich mit mit einer geringen Zahl von Bauelementen sicher und kostengünstig bauen.





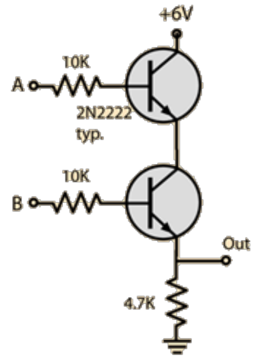






## Logisch „Und“

| a | b | a und b |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |




Beide Aussagen müssen in einer UND-Beziehung „wahr sein“(=1): Konjunktion, AND-Gatter

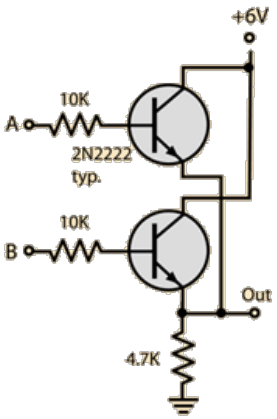






## Logisch „Oder“

| a | b | a oder b |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |




Eine Aussage muss in einer Oder-Beziehung „wahr sein“(=1): Disjunktion, OR-Gatter

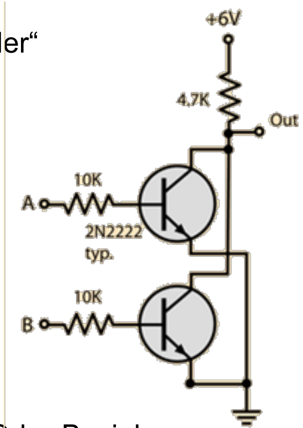






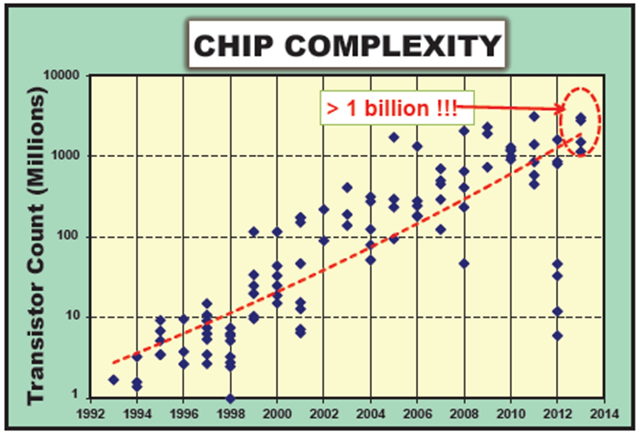
## Logisch „Exklusives Oder“

| a | b | a „oder“ b |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |




Beide Aussagen müssen in einer Oder-Beziehung („wahr“(1) und „falsch“(0)) zutreffen: Ausschließende Disjunktion, Kontravalenz, XOR-Gatter

## "Moore'sche" Gesetz




Alle 2 Jahre verdoppelt(e) sich die Transistor-Dichte auf einem Chip





Mehr dazu in der "Silizium"-Vorlesung

## Agenda

"Hilberts Hotel"

W. Hagen – Digitales Rechnen,- „Turing Maschine" - „von Neumann Prinzip"





## David Hilbert

... (1862-1943) war ein deutscher Mathematiker. Er gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker der Neuzeit.

In einer Rede auf dem internationalen Mathematikerkongress in Paris im Jahre 1900 listete er 23 ungelöste mathematischen Probleme auf, die die mathematische Forschung des 20. Jahrhunderts wesentlich beeinflusste.

W. Hagen – Digitales Rechnen,- „Turing Maschine" - „von Neumann Prinzip"



wir können nicht alle, aber drei diskutieren

Grundlagen-Probleme der Mathematik

## Ein paar Probleme aus Hilberts Liste

Hilberts 6. Problem
Fragestellung: Wie kann die Physik axiomatisiert werden?
Lösung: Unbekannt.

Hilberts 8. Problem
Fragestellung: Ist jede gerade Zahl größer als 2 als Summe zweier Primzahlen darstellbar? Lösung: Unbekannt.

Hilberts 2. Problem
Fragestellung: Sind die arithmetischen Axiome widerspruchsfrei?
Lösung: ??

W. Hagen – Digitales Rechnen,- „Turing Maschine" - „von Neumann Prinzip"



Für die Computer-Entwicklung entscheidend:

Hilberts Traum war es, eine widerspruchsfreie Mathematik zu konstruieren, die ihre Widerspruchsfreiheit vollständig aus sich selbst heraus begründen könnte.

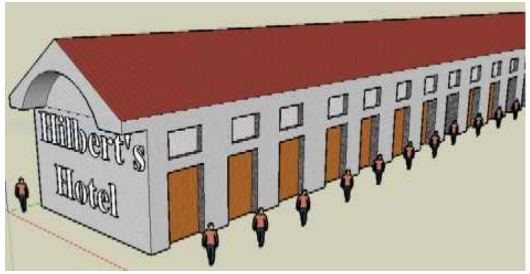
Ein schöne Probe auf eine mathematische Widerspruchsfreiheit ist die Frage, ob man unendliche Mengen (Zahlen, Mächtigkeiten) „konsistent“ aufzählen kann ....

Ein klassisches Beispiel dafür ist bekannt unter „Hilberts Hotel“
[Das Prinzip stammt allerdings vom Begründer der Mengenlehre, Georg Cantor (1845-1918)]





Hilberts Hotel ist unendlich gross und hat unendlich viele Zimmer, die mit unendlich vielen Menschen belegt sind.




Da kommt noch ein Gast!

Findet er Platz und wenn ja, wie?





Die Lösung: Jeder Gast rückt ein Zimmer weiter, und der Neuankömmling zieht in Zimmer Nr. 1 ein

1 → 2
2 → 3
3 → 4
.....
n = n+1

$$\infty + 1 = \infty$$





Prinzip der “Abzählung” der Unendlichkeit:
Die Eins-zu-Eins-Abbildung einer Menge auf eine andere (—> “Erfindung” der Mengenlehre)

1 → 2
2 → 3
3 → 4
.....
n = n+1

$$\infty + 1 = \infty$$

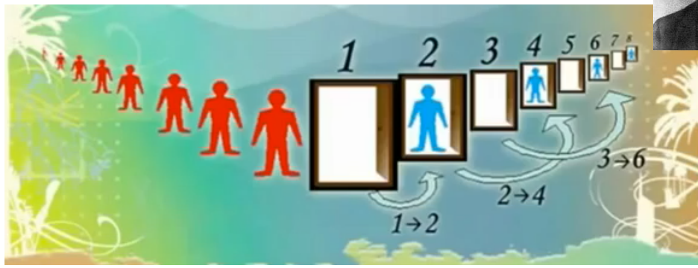
Jetzt kommt ein unendlich grosser Bus, vollgepackt mit unendlich vielen Leuten.....


Finden die auch Platz? Und wenn ja, wie?





Lösung:




1 →
2
2 →
4
3 → 6
.....

$$\infty + \infty = \infty$$





Nun kommen ein unendlich viele Busse, jeweils vollgepackt mit unendlich vielen Leuten.....


Finden auch die noch Platz? Und wenn ja, wie?





Lösung in 2 Schritten:

a)

1 → 2
2 → 4
3 → 6
.....
n = 2n

Erst mal alle Zimmer freimachen, die ungerade Zimmernummern haben und diese Bewohner auf Zimmer schicken, die „gerade“ Nummern haben (also durch 2 teilbar sind)

$$p^{x}_{n} = p^{x+1}_{n+1}$$

Lösung in 2 Schritten:

a)

1 → 2
2 → 4
3 → 6
.....
n = 2n

$$p_n^x = p_{n+1}^{x+1}$$

b)

Bus 1 — 3, 9, 27, 81, ...
$3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots$

Bus 2 — 5, 25, 125, 625, ...
$5^1, 5^2, 5^3, 5^4, \ldots$

Bus 3 — 7, 49, 343, 2401, ...
$7^1, 7^2, 7^3, 7^4, \ldots$

.... .....

Jetzt möglich: Jeder Bus erhält eine Primzahl und seine Potenzen als Zimmernummer. (Primzahl-Unendlichkeits-Beweis: Euklid)

$$\infty * \infty = \infty$$





$$\infty + 1 = \infty$$

$$\infty + \infty = \infty$$

$$\infty * \infty = \infty$$

Es sind die „gleichen" Unendlichkeiten – oder auch die „gleich mächtigen" Unendlichkeiten, - genannt Aleph 0





Georg Cantor

Es sind die „gleichen" Unendlichkeiten – oder auch „gleich mächtige" Unendlichkeiten (genannt Aleph 0). $\aleph_0$

Eine solche Unendlichkeit ist abzählbar z.B. durch eine vollständige Bijektion folgender Art:

$$\{\ 1, 2, 3, 4, 5, 6\ldots\ \}$$

$$\{\ 100, 200, 300, 400, 500, 600\ldots\ \}$$





Georg Cantor

Georg Cantor …

.. bewies, dass die Menge der natürlichen Zahlen $\{\ 1, 2, 3, 4, 5, 6\ldots\ \}$

... der Menge der rationalen Zahlen (Brüche) äquivalent ist.

Verfahren: Der Diagonalisierungs-Beweis.

(Dieses Beweis-Verfahren führt uns zur Turing-Maschine...

... also zum logischen „Urvater" des Computers …)

$$\begin{array}{cccccccc} \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \frac{6}{1} & \frac{7}{1} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \frac{6}{2} & \cdots & \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{6}{3} & \cdots & \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \end{array}$$

Georg Cantor

... Cantors Matrix, die alle Brüche aufzählt ...





... Und wie zählt man nun diese Matrix ab?

$$\begin{array}{cccccccc} \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \frac{6}{1} & \frac{7}{1} & \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \frac{6}{2} & \cdots & \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{6}{3} & \cdots & \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \end{array}$$

Georg Cantor





$$\begin{array}{c|cccccccc} 1, & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \frac{6}{1} & \frac{7}{1} & \\ 2, & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \frac{6}{2} & \cdots & \\ 3, & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{6}{3} & \cdots & \\ 4, & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} & \cdots & \\ .., & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \end{array}$$

Georg Cantor

... Die Abzählung der (in den Brüchen enthaltenen) ganzen Zahlen läuft diagonal mit der Zeilenzahl ...





... Die Abzählung der Brüche läuft andersherum ...

$$\begin{array}{cccccccc} \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \frac{6}{1} & \frac{7}{1} & \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \frac{6}{2} & \cdots & \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{6}{3} & \cdots & \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \end{array}$$

$$\{\ \cancel{1}, \cancel{2}, 3, \cancel{4}, \cancel{5}, 6, \cancel{7}, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11, 12, 13 \dots\ \}$$

Georg Cantor

... Die Abzählung der Brüche läuft andersherum ...

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \frac{6}{1} & \frac{7}{1} \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \frac{6}{2} & \cdots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{6}{3} & \cdots \\
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

$$\{\, 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\ldots \,\}$$

Georg Cantor

Ergebnis:
Die Zahl der unendlichen positiven Brüche ist durch die natürlichen Zahlen vollständig abzählbar...





... Und nun *eine* Matrix von reellen Zahlen ...

$$\begin{array}{cccccccccccc}
0 & , & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots \\
0 & , & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\
0 & , & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\
0 & , & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots \\
0 & , & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots
\end{array}$$

Georg Cantor

$$\{\, 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\ldots \,\}$$

... Vollständig abzählbar?





$$\begin{array}{cccccccccccc}
0 & , & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots \\
0 & , & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\
0 & , & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\
0 & , & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots \\
0 & , & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots
\end{array}$$

$$0 \; , \; 0 \; 0 \; 1 \; 0 \; 0 \; \ldots$$

Die (unendliche) Zahl, die sich aus der Links-Rechts-Diagonale ergibt, ist durch kein Verfahren abzählbar



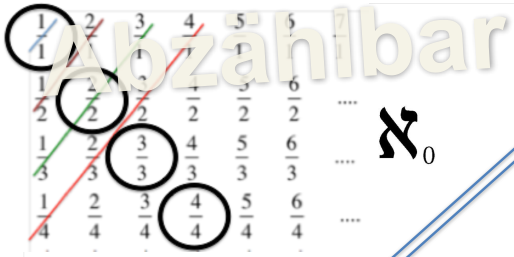


In einer unendlichen Reihe von reellen Zahlen kann durch das

$$\begin{array}{cccccccccccc}
0 & , & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots \\
0 & , & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\
0 & , & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\
0 & , & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots \\
0 & , & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots
\end{array}$$

Diagonalisierungs-Verfahren gezeigt werden, dass **stets eine neue Zahl erzeugt werden kann, die in der Reihe nicht enthalten ist** und also auch nicht abgezählt werden konnte.

Reelle Zahlen sind also „über“-abzählbar oder „transfinit“.




$\aleph_0$

Jede Zahl, die aus dieser Diagonale gebildet wird, ist eine ganze Zahl

$\aleph_1$

Jede Zahl, die aus dieser Diagonale gebildet wird, Ist **nicht** in der Liste enthalten




Agenda der Vorlesung:

Alan Turing und die „Turing Maschine“
(Berechenbarkeit / Nicht-Berechenbarkeit)





Das für die Computergeschichte entscheidende Problem aus Hilberts Liste:

Hilberts 2. Problem
Fragestellung: Sind die **arithmetischen Axiome** widerspruchsfrei?
Lösung: [Alan Turing wird einen, allerdings, negativen Beweis liefern…]

Wer ist Alan Turing und wie geht sein Beweis, dass eine widerspruchsfreie Begründung der Mathematik **nicht** möglich ist?






5’23’’

Resümee von ein paar Kernaussagen…

ON COMPUTABLE NUMBERS, WITH AN APPLICATION TO THE ENTSCHEIDUNGSPROBLEM

*By* A. M. TURING.

[Received 28 May, 1936.—Read 12 November, 1936.]

Turing Ideen über Rechenmaschinen im Jahr 1935 entstanden, als er ein tiefes und verborgenes Problem in den Grundlagen der mathematischen Logik zu lösen versuchte, - Hilberts „Entscheidungsproblem“.

Um die Jahrhundertwende 1900 hatte der deutsche Mathematiker David Hilbert gefragt: ‘Ist die Mathematik entscheidbar? Gibt es eine definitive Methode, die im Prinzip auf jede Behauptung angewandt werden kann und die richtige Entscheidung garantiert, ob die Behauptung wahr ist?’



Was heisst “Methode”?



ON COMPUTABLE NUMBERS, WITH AN APPLICATION TO THE ENTSCHEIDUNGSPROBLEM

*By* A. M. TURING.

[Received 28 May, 1936.—Read 12 November, 1936.]

Turing **eine unwiderlegbare** ‘Methode’, - dabei er geht zweistufig vor.

Im ersten Schritt erfindet er eine Maschine, die “Entscheidungen” trifft.

Im nächsten Schritt prüft er, ob die Entscheidungen, die diese Maschine trifft, durch eine weitere Maschine des gleichen Typs überprüft werden kann. Er beweist: Nein, unmöglich!



Noch einmal anders gesagt:



ON COMPUTABLE NUMBERS, WITH AN APPLICATION TO THE ENTSCHEIDUNGSPROBLEM

*By* A. M. TURING.

[Received 28 May, 1936.—Read 12 November, 1936.]

Turing bewies, dass eine simple Maschine, auf stellenwertiger Schreibweise basierend, in der Lage ist, jede denkbare mathematische Berechnung vorzunehmen, sofern diese Berechnung durch einen Algorithmus repräsentiert werden kann.

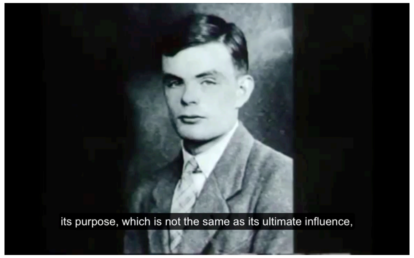


und was ist der Zweck der Übung?



ON COMPUTABLE NUMBERS, WITH AN APPLICATION TO THE ENTSCHEIDUNGSPROBLEM

30’’




Sein Aufsatz sollte zeigen, dass eine bestimmte Aufgabe unmöglich ist, aber das ist sehr schwer zu machen und zu verstehen. Die meisten Leute würden denken, dass wenn Leute versucht haben, etwas zu tun und dann gescheitert sind, es zur Genüge zeigt, dass es unmöglich war, was sie versuchten. Aber das ist nicht der Fall. Es könnte ja eines Tages jemand kommen und zeigen, wie’s geht. Was Alan demonstrieren wollte und was ihm zu demonstrieren gelang, war, **dass eine bestimmte Aufgabe niemals durchgeführt werden kann.**



Also ein Negativbeweis! - Aber erstmal: wie funktioniert die Maschine…

## Bestandteile der Turing-Maschine:

1: Ein Band mit Kästchen

2: Ein Lese- und Schreibkopf über einem Kästchen

3: Ein Anfangs-Zustand von 1. und 2.

4: Ein Set von 5 Kodes aus Daten und Anweisungen

Nummer der Anweisung — A | L | S | R | N

- A: Nummer der Anweisung
- L: Zeichen, das gefunden werden soll
- S: Zeichen, in das das Gefundene geändert Werden soll
- R: Kopf-Richtung L,R,-
- N: Nummer der nächsten Anweisung



Die Turing - Maschine

## Bestandteile der Turing-Maschine:

1: Ein Band mit Kästchen

2: Ein Lese- und Schreibkopf über einem Kästchen

3: Ein Anfangs-Zustand von 1. und 2.

4: Ein Set von 5 Kodes aus Daten und Anweisungen

Nummer der Anweisung — A | L | S | R | N

- A: Nummer der Anweisung
- L: Zeichen, das gefunden werden soll
- S: Zeichen, in das das Gefundene geändert Werden soll
- R: Kopf-Richtung L,R,-
- N: Nummer der nächsten Anweisung

wobei



Die Turing - Maschine

## Bestandteile der Turing-Maschine:

Diese beiden Items bilden gemeinsam den so genannten “Status” der Maschine

Nummer der Anweisung — A | L

Zeichen, das gefunden werden soll

Die Turing - Maschine

## Bestandteile der Turing-Maschine:

1: Ein Band mit Kästchen

2: Ein Lese- und Schreibkopf über einem Kästchen

3: Ein Anfangs-Zustand von 1. und 2.

4: Ein Set von 5 Kodes aus Daten und Anweisungen

Nummer der Anweisung — A | L | S | R | N

- A: Nummer der Anweisung
- L: Zeichen, das gefunden werden soll
- S: Zeichen, in das das Gefundene geändert Werden soll
- R: Kopf-Richtung L,R,-
- N: Nummer der nächsten Anweisung

Dann mal ein Beispiel...

## Die Turing - Maschine

Lese- Schreib-Kopf

Band

Die Anweisungen des Algorithmus

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | . | . | . | 1 |
| 1 | . | . | . | 2 |
| 2 | . | . | . | 3 |
| 3 | . | . | . | 4 |
| 4 | . | . | . | 5 |
| 5 | . | . | . | 6 |
| 6 | . | . | . | 7 |
| 7 | . | . | . | 8 |
| 8 | . | . | . | 9 |
| 9 | . | . | . | H |

Konkretes Beispiel...



## Die Turing - Maschine

Beispielaufgabe: Verwandle „mann“ in „frau“ und vice versa

m a n n f r a u

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | m | f | r | 1 |
| 1 | a | r | r | 2 |
| 2 | n | a | r | 3 |
| 3 | n | u | r | 4 |
| 4 | _ | / | r | 5 |
| 5 | f | m | r | 6 |
| 6 | r | a | r | 7 |
| 7 | a | n | r | 8 |
| 8 | u | n | r | 9 |
| 9 | _ | ! | r | H |

Lies „m“, schreib „f“, Kopf →, Gehe zu Anw. 1

Wir gehen zu Anweisung 1



## Die Turing - Maschine

Beispielaufgabe: Verwandle „mann“ in „frau“ und vice versa

f a n n f r a u

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | m | f | r | 1 |
| 1 | a | r | r | 2 |
| 2 | n | a | r | 3 |
| 3 | n | u | r | 4 |
| 4 | _ | / | r | 5 |
| 5 | f | m | r | 6 |
| 6 | r | a | r | 7 |
| 7 | a | n | r | 8 |
| 8 | u | n | r | 9 |
| 9 | _ | ! | r | H |

Lies „a“, schreib „r“, Kopf →, Gehe zu Anw. 2



## Die Turing - Maschine

Beispielaufgabe: Verwandle „mann“ in „frau“ und vice versa

f r n n f r a u

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | m | f | r | 1 |
| 1 | a | r | r | 2 |
| 2 | n | a | r | 3 |
| 3 | n | u | r | 4 |
| 4 | _ | / | r | 5 |
| 5 | f | m | r | 6 |
| 6 | r | a | r | 7 |
| 7 | a | n | r | 8 |
| 8 | u | n | r | 9 |
| 9 | _ | ! | r | H |

Lies „n“, schreib „a“, Kopf →, Gehe zu Anw. 3

Beispielaufgabe: Verwandle „mann“ in „frau“ und vice versa

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | f | r | a | n | | f | r | a | u | | | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | m | f | r | 1 | |
| 1 | a | r | r | 2 | |
| 2 | n | a | r | 3 | |
| 3 | n | u | r | 4 | Lies „n“, schreib „u“, Kopf →, Gehe zu Anw. 4 |
| 4 | _ | / | r | 5 | |
| 5 | f | m | r | 6 | |
| 6 | r | a | r | 7 | |
| 7 | a | n | r | 8 | |
| 8 | u | n | r | 9 | |
| 9 | _ | ! | r | H | |







Beispielaufgabe: Verwandle „mann“ in „frau“ und vice versa

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | f | r | a | u | | f | r | a | u | | | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | m | f | r | 1 | |
| 1 | a | r | r | 2 | |
| 2 | n | a | r | 3 | |
| 3 | n | u | r | 4 | |
| 4 | _ | / | r | 5 | Lies „ “, schreib „/“, Kopf →, Gehe zu Anw. 5 |
| 5 | f | m | r | 6 | |
| 6 | r | a | r | 7 | |
| 7 | a | n | r | 8 | |
| 8 | u | n | r | 9 | |
| 9 | _ | ! | r | H | |







Beispielaufgabe: Verwandle „mann“ in „frau“ und vice versa

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | f | r | a | u | / | f | r | a | u | | | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | m | f | r | 1 | |
| 1 | a | r | r | 2 | |
| 2 | n | a | r | 3 | |
| 3 | n | u | r | 4 | |
| 4 | _ | / | r | 5 | |
| 5 | f | m | r | 6 | Lies „f“, schreib „m“, Kopf →, Gehe zu Anw. 6 |
| 6 | r | a | r | 7 | |
| 7 | a | n | r | 8 | |
| 8 | u | n | r | 9 | |
| 9 | _ | ! | r | H | |







Variante: Verwandle „mann“ in „frau“ und vice versa

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | f | r | a | u | / | m | r | a | u | | | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | m | f | r | 1 | |
| 1 | a | r | r | 2 | |
| 2 | n | a | r | 3 | |
| 3 | n | u | r | 4 | |
| 4 | _ | / | r | 5 | |
| 5 | f | m | r | 6 | |
| 6 | r | a | r | 7 | Lies „r“, schreib „a“, Kopf →, Gehe zu Anw. 7 |
| 7 | a | n | r | 8 | |
| 8 | u | n | r | 9 | |
| 9 | _ | ! | r | H | |

Beispielaufgabe: Verwandle „mann“ in „frau“ und vice versa

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | f | r | a | u | / | m | a | a | u | | | | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | m | f | r | 1 |
| 1 | a | r | r | 2 |
| 2 | n | a | r | 3 |
| 3 | n | u | r | 4 |
| 4 | _ | / | r | 5 |
| 5 | f | m | r | 6 |
| 6 | r | a | r | 7 |
| 7 | a | n | r | 8 |
| 8 | u | n | r | 9 |
| 9 | _ | ! | r | H |

Lies „a“, schreib „n“, Kopf →, Gehe zu Anw. 8









Beispielaufgabe: Verwandle „mann“ in „frau“ und vice versa

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | f | r | a | u | / | m | a | n | u | | | | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | m | f | r | 1 |
| 1 | a | r | r | 2 |
| 2 | n | a | r | 3 |
| 3 | n | u | r | 4 |
| 4 | _ | / | r | 5 |
| 5 | f | m | r | 6 |
| 6 | r | a | r | 7 |
| 7 | a | n | r | 8 |
| 8 | u | n | r | 9 |
| 9 | _ | ! | r | H |

Lies „u“, schreib „n“, Kopf →, Gehe zu Anw. 9









Beispielaufgabe: Verwandle „mann“ in „frau“ und vice versa

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | f | r | a | u | / | m | a | n | n | | | | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | m | f | r | 1 |
| 1 | a | r | r | 2 |
| 2 | n | a | r | 3 |
| 3 | n | u | r | 4 |
| 4 | _ | / | r | 5 |
| 5 | f | m | r | 6 |
| 6 | r | a | r | 7 |
| 7 | a | n | r | 8 |
| 8 | u | n | r | 9 |
| 9 | _ | ! | r | H |

Lies „_“, schreib „!“, Kopf →, H = Halt An









Beispielaufgabe: Verwandle „mann“ in „frau“ und vice versa

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | f | r | a | u | / | m | a | n | n | ! | | | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | m | f | r | 1 |
| 1 | a | r | r | 2 |
| 2 | n | a | r | 3 |
| 3 | n | u | r | 4 |
| 4 | _ | / | r | 5 |
| 5 | f | m | r | 6 |
| 6 | r | a | r | 7 |
| 7 | a | n | r | 8 |
| 8 | u | n | r | 9 |
| 9 | _ | ! | r | H |

Programm beendet

Eine Turing-Maschine hat dann den Beweis für die Berechenbarkeit eines Problems erbracht, wenn Sie zu einem HALT kommt.

Es kommt also auf den Algorithmus an…

## Die Turing - Maschine

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | f | r | a | u | / | m | a | n | n | ! | | | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | m | f | r | 1 |
| 1 | a | r | r | 2 |
| 2 | n | a | r | 3 |
| 3 | n | u | r | 4 |
| 4 | _ | / | r | 5 |
| 5 | f | m | r | 6 |
| 6 | r | a | r | 7 |
| 7 | a | n | r | 8 |
| 8 | u | n | r | 9 |
| 9 | _ | ! | r | H |

Programm beendet

Es kann auch sein, dass Anweisungen so geschrieben sind, dass eine Turing Maschine NICHT zu einem HALT kommt...

das zeige ich hier mal kurz...







## Die Turing - Maschine

Variante: Verwandle „mann“ in „frau“ und vice versa

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | f | r | a | u | / | m | r | a | u | | | | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | m | f | r | 1 |
| 1 | a | r | r | 2 |
| 2 | n | a | r | 3 |
| .... | ... | ... | ... | ... |
| 6 | r | a | r | 7 |
| 7 | a | n | r | 8 |
| 7 | n | a | r | 8 |
| 8 | u | u | L | 7 |
| 8 | u | n | r | 9 |
| 9 | _ | ! | r | H |

Lies „r“, schreib „a“, Kopf →, Gehe zu Anw. 7

!! Ich habe ab hier Anweisungs-Zeilen verändert !!







## Die Turing - Maschine

Variante: Verwandle „mann“ in „frau“ und vice versa

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | f | r | a | u | / | m | r | a | u | | | | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | m | f | r | 1 |
| 1 | a | r | r | 2 |
| 2 | n | a | r | 3 |
| .... | ... | ... | ... | ... |
| 6 | r | a | r | 7 |
| 7 | a | n | r | 8 |
| 7 | n | a | r | 8 |
| 8 | u | u | L | 7 |
| 8 | u | n | r | 9 |
| 9 | _ | ! | r | H |

Lies „r“, schreib „a“, Kopf →, Gehe zu Anw. 7







## Die Turing - Maschine

Variante: Verwandle „mann“ in „frau“ und vice versa

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | f | r | a | u | / | m | a | a | u | | | | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | m | f | r | 1 |
| 1 | a | r | r | 2 |
| 2 | n | a | r | 3 |
| .... | ... | ... | ... | ... |
| 6 | r | a | r | 7 |
| 7 | a | n | r | 8 |
| 7 | n | a | r | 8 |
| 8 | u | u | L | 7 |
| 8 | u | n | r | 9 |
| 9 | _ | ! | r | H |

Lies „a“, schreib „n“, Kopf →, Gehe zu Anw. 8

## Die Turing - Maschine

Variante: Verwandle „mann“ in „frau“ und vice versa

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | f | r | a | u | / | m | a | n | u | | | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | m | f | r | 1 | |
| 1 | a | r | r | 2 | |
| 2 | n | a | r | 3 | |
| .... | ... | ... | ... | ... | |
| 6 | r | a | r | 7 | |
| 7 | a | n | r | 8 | |
| 7 | n | a | r | 8 | |
| 8 | u | u | L | 7 | Lies „u“, schreib „n“, Kopf ←, Gehe zu Anw. 7 |
| 8 | u | n | r | 9 | |
| 9 | _ | ! | r | H | |





## Die Turing - Maschine

Variante: Verwandle „mann“ in „frau“ und vice versa

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | f | r | a | u | / | m | a | n | u | | | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | m | f | r | 1 | |
| 1 | a | r | r | 2 | |
| 2 | n | a | r | 3 | |
| .... | ... | ... | ... | ... | |
| 6 | r | a | r | 7 | |
| 7 | a | n | r | 8 | Lies „a“, es steht aber „n“, Sprung zur 2. 7. Anw. |
| 7 | n | a | r | 8 | |
| 8 | u | u | L | 7 | |
| 8 | u | n | r | 9 | |
| 9 | _ | ! | r | H | |





## Die Turing - Maschine

Variante: Verwandle „mann“ in „frau“ und vice versa

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | f | r | a | u | / | m | a | n | u | | | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | m | f | r | 1 | |
| 1 | a | r | r | 2 | |
| 2 | n | a | r | 3 | |
| .... | ... | ... | ... | ... | |
| 6 | r | a | r | 7 | |
| 7 | a | n | r | 8 | |
| 7 | n | a | r | 8 | Lies „n“, Schreibe „a“, Kopf →, Gehe zu Anw. 8 |
| 8 | u | u | L | 7 | |
| 8 | u | n | r | 9 | |
| 9 | _ | ! | r | H | |





## Die Turing - Maschine

Variante: Verwandle „mann“ in „frau“ und vice versa

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | f | r | a | u | / | m | a | a | u | | | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | m | f | r | 1 | |
| 1 | a | r | r | 2 | |
| 2 | n | a | r | 3 | |
| .... | ... | ... | ... | ... | |
| 6 | r | a | r | 7 | |
| 7 | a | n | r | 8 | |
| 7 | n | a | r | 8 | |
| 8 | u | u | L | 7 | Lies „u“, Schreibe „u“, Kopf ←, Gehe zu Anw. 7 |
| 8 | u | n | r | 9 | |
| 9 | _ | ! | r | H | |

## Die Turing - Maschine

**Variante:** Verwandle „mann“ in „frau“ und vice versa

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | f | r | a | u | / | m | a | n | u | | | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | m | f | r | 1 | |
| 1 | a | r | r | 2 | |
| 2 | n | a | r | 3 | |
| .... | ... | ... | ... | ... | |
| 6 | r | a | r | 7 | |
| 7 | a | n | r | 8 | Lies „a“, es steht aber „n“, Sprung zur 2. 7. Anw. |
| 7 | n | a | r | 8 | |
| 8 | u | u | L | 7 | |
| 8 | u | n | r | 9 | |
| 9 | _ | ! | r | H | |





## Die Turing - Maschine

**Variante:** Verwandle „mann“ in „frau“ und vice versa

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | f | r | a | u | / | m | a | n | u | | | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | m | f | r | 1 | |
| 1 | a | r | r | 2 | |
| 2 | n | a | r | 3 | |
| .... | ... | ... | ... | ... | |
| 6 | r | a | r | 7 | |
| 7 | a | n | r | 8 | |
| 7 | n | a | r | 8 | Lies „n“, Schreibe „a“, Kopf →, Gehe zu Anw. 8 |
| 8 | u | u | L | 7 | |
| 8 | u | n | r | 9 | |
| 9 | _ | ! | r | H | |





## Die Turing - Maschine

**Variante:** Verwandle „mann“ in „frau“ und vice versa

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | f | r | a | u | / | m | a | a | u | | | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | m | f | r | 1 | |
| 1 | a | r | r | 2 | |
| 2 | n | a | r | 3 | |
| .... | ... | ... | ... | ... | |
| 6 | r | a | r | 7 | |
| 7 | a | n | r | 8 | |
| 7 | n | a | r | 8 | |
| 8 | u | u | L | 7 | Lies „u“, Schreibe „u“, Kopf ←, Gehe zu Anw. 7 |
| 8 | u | n | r | 9 | |
| 9 | _ | ! | r | H | |





## Die Turing - Maschine

**Variante:** Verwandle „mann“ in „frau“ und vice versa

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | f | r | a | u | / | m | a | n | u | | | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | m | f | r | 1 | |
| 1 | a | r | r | 2 | |
| 2 | n | a | r | 3 | |
| .... | ... | ... | ... | ... | |
| 6 | r | a | r | 7 | |
| 7 | a | n | r | 8 | Lies „a“, es steht aber „n“, Sprung zur 2. 7. Anw. |
| 7 | n | a | r | 8 | |
| 8 | u | u | L | 7 | |
| 8 | u | n | r | 9 | |
| 9 | _ | ! | r | H | |

## Die Turing - Maschine

Variante: Verwandle „mann“ in „frau“ und vice versa

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | f | r | a | u | / | m | a | n | u | | | | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | m | f | r | 1 |
| 1 | a | r | r | 2 |
| 2 | n | a | r | 3 |
| .... | ... | ... | ... | ... |
| 6 | r | a | r | 7 |
| 7 | a | n | r | 8 |
| 7 | n | a | r | 8 |
| 8 | u | u | L | 7 |
| 8 | u | n | r | 9 |
| 9 | _ | ! | r | H |

Lies „n“, Schreibe „a“, Kopf →, Gehe zu Anw. 8







## Die Turing - Maschine

Variante: Verwandle „mann“ in „frau“ und vice versa

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | f | r | a | u | / | m | a | a | u | | | | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | m | f | r | 1 |
| 1 | a | r | r | 2 |
| 2 | n | a | r | 3 |
| .... | ... | ... | ... | ... |
| 6 | r | a | r | 7 |
| 7 | a | n | r | 8 |
| 7 | n | a | r | 8 |
| 8 | u | u | L | 7 |
| 8 | u | n | r | 9 |
| 9 | _ | ! | r | H |

Lies „u“, Schreibe „u“, Kopf ←, Gehe zu Anw. 7







## Die Turing - Maschine

Variante: Verwandle „mann“ in „frau“ und vice versa

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | f | r | a | u | / | m | a | a | u | | | | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | m | f | r | 1 |
| 1 | a | r | r | 2 |
| 2 | n | a | r | 3 |
| .... | ... | ... | ... | ... |
| 6 | r | a | r | 7 |
| 7 | a | n | r | 8 |
| 7 | n | a | r | 8 |
| 8 | u | u | L | 7 |
| 8 | u | n | r | 9 |
| 9 | _ | ! | r | H |

So weit – so gut/schlecht......

Lies „u“, Schreibe „u“, Kopf ←, Gehe zu Anw. 7

Diese Turing-Maschine HÄLT NICHT

Und nun? Jetzt kommt Schritt 2, denn:



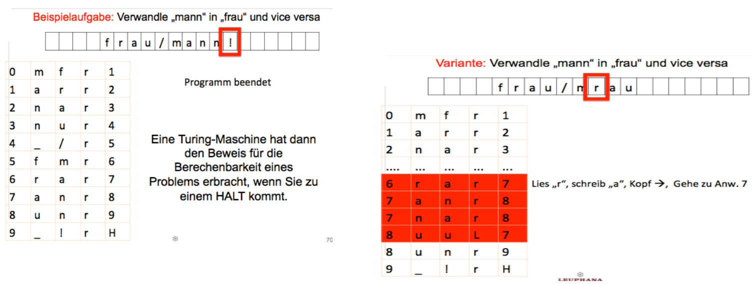




## Die Turing - Maschine

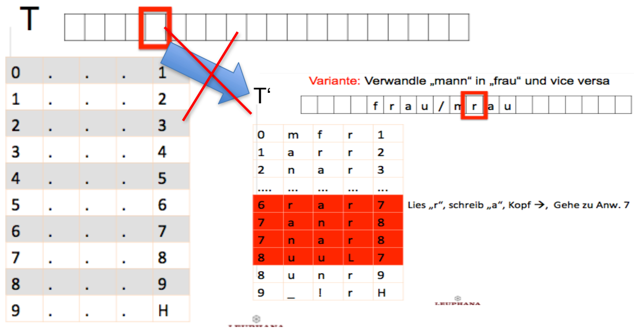
Fassen wir zusammen:

1) Turing erfindet seine Maschine NICHT, um Berechnungen anzustellen, die mal funktionieren oder mal nicht.




Man könnte ja immer versuchen, Fehler zu vermeiden...

2) Die Kernaussage in Turings Theorie lautet :




Es gibt keine Turing-Maschine T, die beweisen könnte, dass eine andere Turing-Maschine (T‘) zu einem Halt kommt.

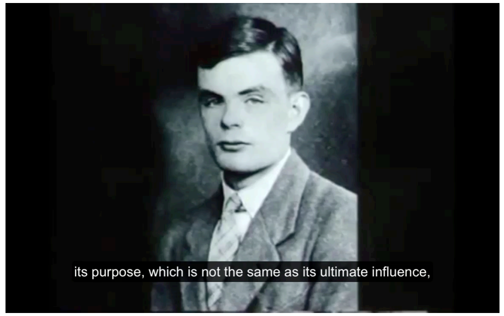


Das ist die “Unmögliche Aufgabe”:



Zusammenfassend:

Turing erfindet die Turing Maschine um zu beweisen, dass eine Turing Maschine niemals eine Turing Maschine „beweisen“ kann.



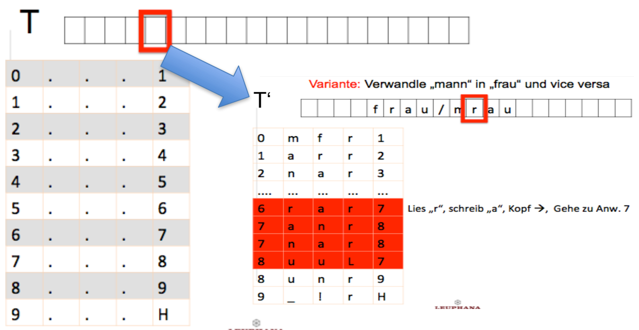

Norman Routledge (1928-2013), englischer Mathematiker und Freund Alan Turings



Vereinfachte Form dieses Beweises...



Beweis:
Nehmen wir an, es gäbe eine Turing-Maschine T, die beweist, das eine T‘ falsch oder richtig läuft...

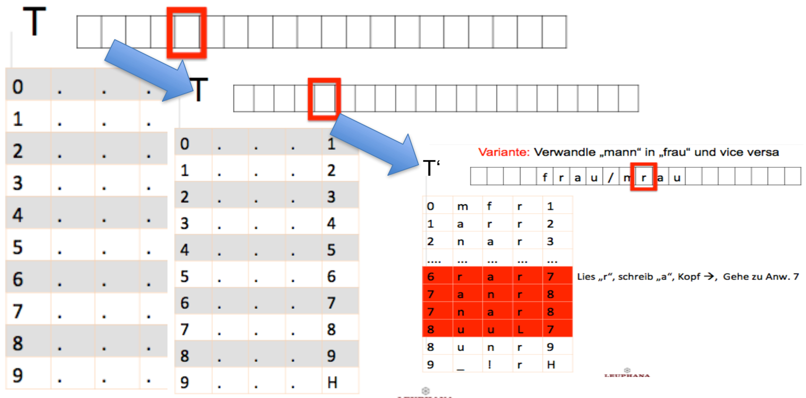





... dann ...



... aber kann es auch keine dritte Turing-Maschine geben, die beweist, ob eine Turing-Maschine, die beweist, ob eine Turing-Maschine zu einem Halt kommt, zu einem Halt kommt ...

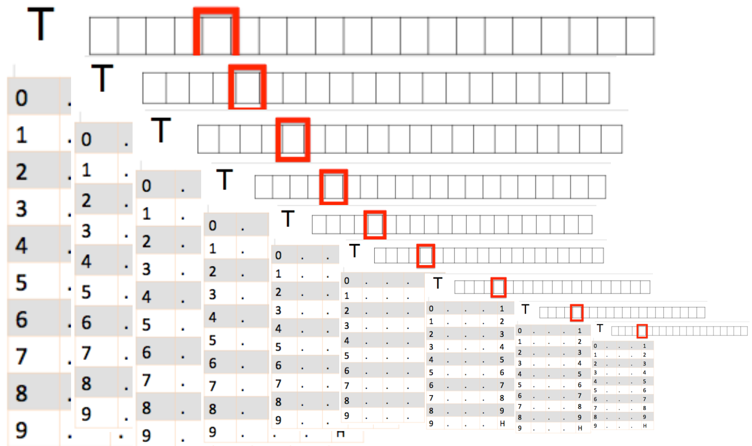





... und ...

## Die Turing - Maschine

... dann gäbe es eine unabzählbare Zahl Turing-Maschinen beweisender Turing-Maschinen....

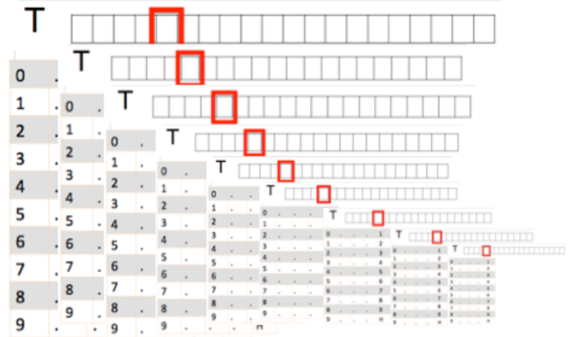




... und das ...

## Die Turing - Maschine

... und das Ganze wäre keine Turing-Maschine mehr, weil es überabzählbar ist und zu keinem HALT kommt ...



Eine Turing-Maschine ist definiert dadurch, dass ihre Berechnung zu einem HALT kommt. Deshalb kann keine Turing-Maschine eine Turing-Maschine beweisen.



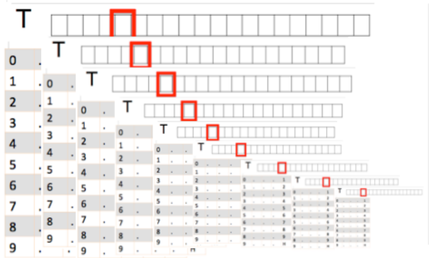
Dies ist vor allem auch (aber nicht nur) für heutige Computerprogramme wichtig....

## Die Turing - Maschine

„Jede widerspruchsfreie formale Theorie enthält notwendigerweise unentscheidbare Aussagen." (Unvollständigkeitssatz von Kurt Gödel, 1931)

Die Mathematik kommt niemals an ihr Ende.

Emil Post: »The logical process is essentially creative.«





Wie geht es mit Turing weiter (nach 1936)..

## Alan Turing und die „Turing Maschine"




7'

Wir heben zwei Punkte heraus:

Transcript des Film-Tons

Well, Turings ideas didn't just stop at the technical field of mathematics and logic. His vision was much larger than that. And the thing, that really drove him on, was thinking: "What is a mental process?" What is any process by which by thinking we could arrive at any conclusion at all. What are our brains doing when we are thinking. And that was the argument in the background, of this paper that he then wrote in 1935 and 36 and his argument was that any mental process whatever seeming the brain works in some definite way, it must do, it must have a mechanical basis to it. Then it must be something which could be simulated by a Turing Machine. So he had a way of formulating what any possible mental process must be. That was his general argument. And that's the argument which looms large and larger in his thought and is now the basis of his ideas about artificial intelligence. Yes, it was very surprising that Turing could do this.



He was a complete outsider to the field of mathematical logic. All the experts in that field America or Germany, they had never heard of him. He was only 23. He was a no-one the the mathematical world and yet he came up with his idea which really changed the field; was completely accepted and is now the foundation of modern computer science. But, why could he do this? I mean, apart from being clever. I think, the thing is, he had his underlying fascination with the whole question of how to describe the mind. What the mind is.

A convoy at sea. One of the lifelines upon which the united nations war effort relies. Obviously the worlds backoffense must be kept constantly applied with food and materials of all kind. Admiral Dönitz and the german Navy are determined to see that these supplies don't get through. And the U-Boot is certainly Hitlers most effective weapon. The U-Boot infact forms one of the most powerful threads to allied victory. The Nazi High Command was determined to avoid the repetision of the debacle of the first world war when british intelligence routinely decoded german military signal traffic.



The key was an encyphering machine called Enigma. Enigma machines were produced by the thousand and used by the entire german military system. Every U-Boot carried one to receive operational orders. To stop the U-Boots, Enigma had to be broken. Enigma was the most advanced enciphering device of its time. It encoded messages via an electro-mechanical system incorporating moving wheels or rotors. A character typed on the keyboard was send electrically and the coded equivalent was read off a illuminated panel. The rotors change their relative position during encipherment to scramble the patterns the codebreaker looks for. The cypher-circuits also went through a plank-board which switched letter-pairs. Rotor and plank-board configurations were changed at regular intervals. Sometimes daily. The codebreakers task was to identify the start-positions of the rotors and unravel the plank-board's set-up. The difficulties were formidable. And one can say how many different possible states were for the machine which was in the order of 10 raised the power of 19, in other words, that is a 1 followed by 19 zeros, if my memory is correct.



And I think the U-Boot-Enigma which had an extra wheel was more like the 10 to 22. Approximately. That give you some idea but it doesn't give you the full idea because clearly you couldn't possibly work through all those possibilities. That would be known as the "british museum attack" on the system. Exhaustive attack. You have to break down the attack in some way and of course that's what we were doing. Halfway between Oxford and Cambridge, Bletchley Park was the headquarters of the war time british code breaking effort. Mathematicians, chess-players, linguists, statisticians and engineers were recruited from all over Britain. At its hight the Bletchley operation involved ten thousand people. Alan Turing was one of the first to arrive. He was interested in code and cyphers from school anyway and it is an amazing thing, that after thinking about these abstract processes and methods that he was doing and thinking about by the idea of the Turing Machine he found himself now actually responsible for real methods in a very real world.

In fact, the most sophisticated methods and processes that ever been thought of and the most complicated mechanical ideas that probably ever been used and in fight against the german Enigma machine. Turings most important contribution I think, was part of the design of the "bomb", the crypto-analytical machine. He had the idea that you could use in effect the theorem in logic which sounds to the untrained ear rather absurd, namely that from a contradiction you can deduce everything. The bronze goddesses were electro-mechanical machines set in bronze cabins. With up to 30 rotating drums equating to the rotors of 10 Enigma machines. These checked intercepted messages at high speed against different possible encipherments. Turing would draw up a menu of possible combinations. Then operators, like Mary Stuart. These bombs helped break Enigma messages from late 1940 on. Well, of course, for anyone who wanted to get on with scientific research, as Turing did, the war could have been a just a terrible waste of time. An in some ways it must have been for Alan Turing.



But it gave him an awful lot in a very amazing way. You see, at Bletchley, you'd seen by the end of the war thousands and thousands of people thousands of machines, all working away at these special sophisticated methods. These processes that he and other people had developed. An enormous scale. Now, what he could see, as probably no one else could see, is, that all these different methods and processes all these special machines could in fact be programs for one universal machine. War time code-breaking was of course a life and death matter. Speed was everything. And towards the end of the war, cryptoanalytic machine like the Colossus used electronics, because they were so much faster that the older electro-mechanical systems. Turing saw, that electronics were the key to realising his dream of a universal machine of real life programmable computer.



Ende der Vorlesung